فصل چهارم: مشتق

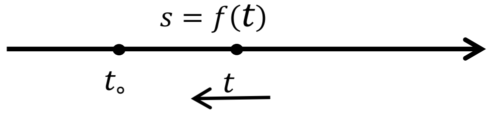
معمولاً در کتاب‌های درسی «حساب دیفرانسیل و انتگرال» مشتق به طور دقیق با حد تعریف می‌شود،اما در تاریخ ریاضیات ابتدا مشتق مطرح شد. بعد از پیدایش هندسه تحلیلی توسط **دکارت** مفهوم مشتق از تلاش ریاضی دانان برای حل مسائلی مانند یافتن خط مماس بر منحنی و یا سرعت لحظه‌ی یک متحرک شکل گرفت و در آثار ریاضی دانان ظاهر شد. ولی اولین صورت بندی رضایت‌مند آن در کارهای **نیوتن** و **لایپ نیتس** پدیدار شد.

۱- نسبت تغییرات

مفهوم مشتق بررسی تغییر یک کمیت نسبت به تغییر کمیت دیگر است، هنگامی که تغییرات بسیار اندک باشد.

سرعت لحظه ای

خط راست جهت داری را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم متحرکی از یک نقطه روی این خط شروع به حرکت کند و $s = f(t)$ معادله‌ی حرکت این متحرک نسبت به زمان t باشد.



سرعت متوسط در بازه‌ی $[t_{\circ}\ ,t]$ برابر است با مسافت طی شده، تقسیم بر زمان سپری شده یعنی $v = \frac{f(t)-f(t_{\circ})}{t-t_{\circ}}$ برای اینکه بدانیم سرعت در لحظه‌ی $t = t_{\circ}$ چقدر است باید فاصله‌ی $[t_{\circ}\ ,t]$ را کوچک کنیم. به بیان ریاضی باید t به سمت $t_{\circ}$ میل کند. بنابراین سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی $t = t_{\circ}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$v(t_{\circ}) = \lim_{t \to t_{\circ}} \frac{f(t)-f(t_{\circ})}{t-t_{\circ}}$$

بنابراین سرعت لحظه‌ای مشتق مسافت نسبت به زمان است.

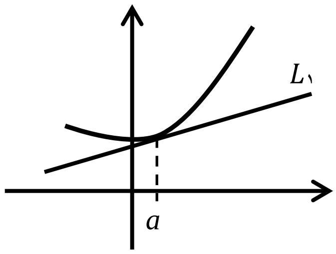
به طور کلیتر اگر کمیت y با کمیت x با ضابطه‌ی $y = f(x)$ معین شده باشد، آهنگ تغییر (لحظه ای)y نسبت به x در نقطه‌ی $x = a$ به صورت

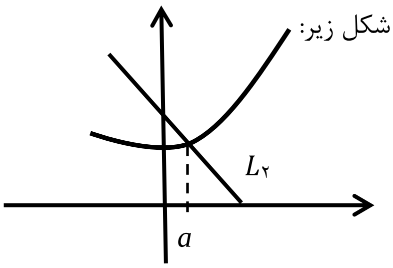
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف می‌شود.این عبارت مشتق$f(x)$ نسبت بهx در نقطه‌ی $x = a$ نام دارد.

مماس بر منحنی

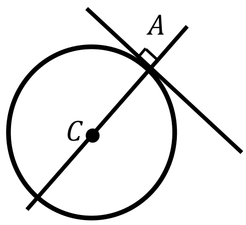
به طور شهودی در دو شکل زیر:





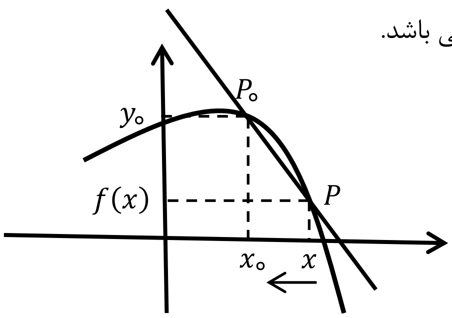
خط L_1 بر منحنی مماس است ولی خط L_2 بر منحنی مماس نیست.

خط مماس بر دایره در یک نقطه مانند A ، خطی است که از نقطه A عبور می‌کند و بر خطی که از مرکز دایره و نقطه A عبور می‌کند عمود باشد.



همچنین برای دیگر مقاطع مخروطی (بیضی – هذلولی و سهمی) با توجه به شکل هندسی آنها می‌توان خط مماس را تعریف کرد. ولی برای منحنی‌های دلخواه خط مماس چگونه باید تعریف شود؟ تلاش برای پاسخ به این سوال در قرن هفدهم میلادی منجر به تعریف مشتق شد.

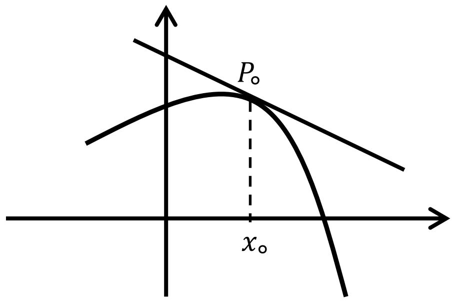
نقطه‌ی $P_0\ (x_0, y_0)$ را روی منحنی $y = f(x)$ در نظر می‌گیریم و فرض کنیم نقطه‌ی متحرک $P(x, f(x))$ روی منحنی باشد.



شیب خط گذرنده از دو نقطه ی P و $P_\circ$ برابر است با: $m_{\overline{P_\circ P}} = \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$

اکنون با نزدیک شدن نقطه‌ی P به نقطه‌ی $P_\circ$ خط قاطع $\overline{P_\circ P}$ به خطی نزدیک می‌شود که آن را خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ی $P_\circ\,(x_\circ, x)$ می‌نامند، شیب این خط برابر است با:

$$m = \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$



به عبارت دیگر شیب خط مماس، مشتق $f(x)$ نسبت به x در $x = x_\circ$ است.

همانطور که دیدیم هم سرعت لحظه ای و هم مماس بر منحنی با مشتق قابل بیان هستند.

تعریف مشتق. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در اطراف نقطه‌ی $x = x_\circ$ تعریف شده باشد در این صورت مشتق f در نقطه‌ی $x_\circ$ به صورت زیر است:

$$\acute{f}(x_\circ) = \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

در صورتی که این حد عدد شود، $f(x)$ را در $x = x_\circ$ مشتق پذیر می‌نامند.

اگر $\Delta x = x - x_\circ$ مشتق f به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\acute{f}(x_\circ) = \lim_{\Delta x\to \circ} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

مثال .مشتق تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ی $x = ۳$ بیابید.

حل.

$$\acute{f}(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۳-x}{۳x}}{x-۳} = \frac{-۱}{۶}$$ بنابراین:

$$\acute{f}(۳) = \frac{-۱}{۶}$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = x^۲$ را در $x = ۱$ بیابید و سپس آن را تفسیر کنید.

حل. $\acute{f}(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$ پس : $\acute{f}(۱)=۲$

فرض کنیم: $\Delta x=x-۱$ و $\Delta y=f(x)-f(۱)$ بنابراین:

$$\acute{f}(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{\Delta y}{\Delta x}=۲$$

اگر x نزدیک ۱ باشد. $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cong ۲$ یا $\Delta y\cong ۲\Delta x$ یعنی به ازای x های نزدیک ۱، تغییرات y تقریبا ۲ برابر تغییرات x است.

۲- مشتق توابع

قضیه. اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در $x=a$ پیوسته است.

اثبات. باید نشان دهیم : $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)=\acute{f}(a)\times ۰=۰$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \quad \blacksquare$$

قواعد مشتق گیری

فرض کنیم f و g توابعی مشتق پذیر و k عددی ثابت باشد.

$$\big(f(x)\pm g(x)\big)'=\acute{f}(x)\pm\acute{g}(x)$$

$$\big(f(x).g(x)\big)'=\acute{f}(x).g(x)+\acute{g}(x).f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{\acute{f}(x).g(x)-\acute{g}(x).f(x)}{g^۲(x)}\quad,\quad g(x)\neq ۰$$

$$\big(kf(x)\big)'=k\acute{f}(x)$$

$$(k)'=۰$$

فرمول‌های مشتق

مشتق توابع جبری:

$n \in \mathbb{R} \quad , \quad (x^n)' = nx^{n-1}$ (ب) (برای بعضی nها باید $x > 0$ باشد.)

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$$

مشتق توابع مثلثاتی:

$$(sinx)' = cosx$$
$$(cosx)' = -sinx$$

$$(tanx)' = sec^2x = \frac{1}{cos^2x}$$
$$(cotx)' = -csc^2x = \frac{-1}{sin^2x}$$

$$(secx)' = secx.tanx$$
$$(cscx)' = -cscx.cotx$$

مشتق توابع وارون مثلثاتی:

$$(sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(cos^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(cot^{-1}x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی:

$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x.\ln a$$

$$(lnx)' = \frac{۱}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{۱}{x.lna}$$

مشتق توابع هیپربولیک:

$$(sinhx)' = coshx$$
$$(coshx)' = sinhx$$

$$(tanhx)' = sech^{۲}x$$
$$(cothx)' = -csch^{۲}x$$

مشتق توابع وارون هیپربولیک:

$$(sinh^{-۱}x)' = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$
$$(cosh^{-۱}x)' = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۱}}$$

$$(tanh^{-۱}x)' = \frac{۱}{۱ - x^{۲}} \quad , \quad |x| < ۱$$
$$(coth^{-۱}x)' = \frac{۱}{۱ - x^{۲}} \quad , \quad |x| > ۱$$

مشتق توابع چند ضابطه‌ای:

$$(|x|)' = \frac{|x|}{x} \quad , \quad x \neq ۰$$

$$([x])' = ۰ \quad , \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$(sgn(x))' = ۰ \quad , \quad x \neq ۰$$

$$(u(x))' = ۰ \quad , \quad x \neq ۰$$

مثال: با استفاده از قواعد و فرمول‌های مشتق، مشتق توابع زیر محاسبه شده‌اند.

$$(x^{۳}lnx)' = ۳x^{۲}.lnx + \frac{۱}{x}.x^{۳}$$

$$(tan.e^{x})' = \sec^{۲}x.e^{x} + e^{x}tanx$$

$$\left(\frac{sin^{-۱}x}{sinx}\right)' = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}.sinx - cosx.sin^{-۱}x}{sin^{۲}x}$$

دیدیم که شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_{۰}$ برابر است با:

$$m = f'(x_{۰})$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_{۰}$ روی منحنی، به صورت زیر است:

$$y = f(x_{۰}) + f'(x_{۰})(x - x_{۰})$$

مثال. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ را در نقطه‌ی $x = ۱$ بیابید.

حل. $f'(x) = \left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-۱}{۲\sqrt{x^{۳}}}$ پس: $m = f'(۱) = \frac{-۱}{۲}$ بنابراین:

$y = f(۱) + f'(۱)(x - ۱)$ یا $y = ۱ + \frac{-۱}{۲}(x - ۱)$

مثال. شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = sinhx$ را در نقطه‌ی $x = ۰$ بیابید.

حل. $f'(x) = coshx$ پس $m = f'(۰) = cosh\,۰ = ۱$

مشتق چپ و راست به صورت زیر تعریف می‌شوند:

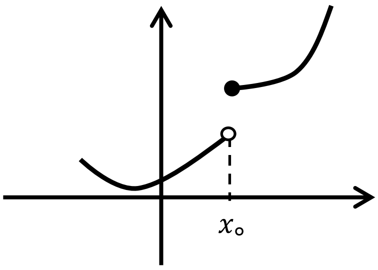
مشتق راست $$f'_{+}(x_{۰}) = \lim_{x \to x_{۰}^{+}} \frac{f(x) - f(x_{۰})}{x - x_{۰}}$$

مشتق چپ $$f'_{-}(x_{۰}) = \lim_{x \to x_{۰}^{-}} \frac{f(x) - f(x_{۰})}{x - x_{۰}}$$

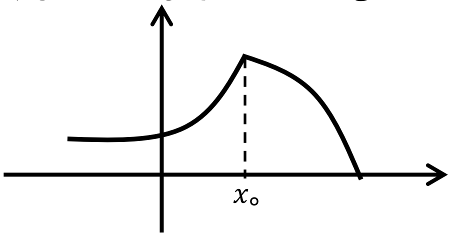
توجه. تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق پذیر است *اگر و فقط اگر* مشتق راست و مشتق چپ در $x_\circ$ وجود داشته و مساوی باشند.

در هر یک از حالت های زیر تابع f در نقطه‌ی $x = x_\circ$ مشتق پذیر نیست.

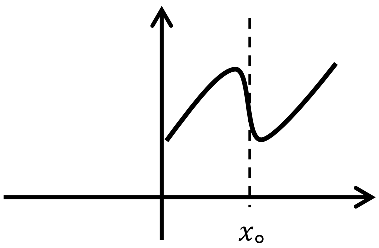
الف) f در $x = x_\circ$ ناپیوسته باشد.



ب) f در $x = x_\circ$ شکستگی داشته باشد. در این حالت مشتق چپ و راست با هم برابر نیستند.



ج) f در $x = x_\circ$ مماس قائم داشته باشد. در این حالت: $f'(x_\circ) = \infty$



مثال. مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را بررسی کنید.

حل. $x \neq \circ \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ و $f'(\circ) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\Big|_{x=\circ} = +\infty$

تابع در $x = \circ$ مشتق پذیر نیست.(مشتق نامتناهی دارد.)

مثال. مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < \circ \\ x^2 & \circ \leq x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$ را بیابید.

حل. وجود مشتق را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم.

$$\acute{f}_{+}(۰) = (x^{۲})'|_{x=۰} = ۲x|_{x=۰} = ۰ \quad \text{و} \quad \acute{f}_{-}(۰) = (x^{۳})'|_{x=۰} = ۳x^{۲}|_{x=۰} = ۰$$

همچنین f در $x = ۰$ پیوسته است. پس $\acute{f}(۰) = ۰$

در نقطه $x = ۲$ تابع f ناپیوسته و لذا مشتق پذیر نیست. بنابراین:

$$\acute{f}(x) = \begin{cases} ۳\,x^{۲} & x < ۰ \\ ۲\,x & ۰ \leq x < ۲ \\ ۱ & x > ۲ \end{cases}$$

مثال. تابعی مثال بزنید که دامنه آن $\mathbb{R}$ و فقط در نقطه ی $x = ۱$ مشتق پذیر باشد.

حل.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۲\,x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

از تساوی $x^{۲} + ۱ = ۲\,x$ ، بدست می آید: $x = ۱$ پس f در $x = ۱$ پیوسته است. از طرفی $\acute{f}(x)\big|_{x \in \mathbb{Q}} = ۲x$ و $\acute{f}(x)\big|_{x \notin \mathbb{Q}} = ۲$ و از تساوی $۲\,x = ۲$ بدست می‌آید: $x = ۱$

بنابراین $\acute{f}(۱) = ۲$ ، اما f در نقاط $x \neq ۱$ ناپیوسته و لذا در این نقاط مشتق پذیر نیست.

۳- قاعده زنجیری و مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، نمادهای دیگر مشتق $f(x)$ به صورت زیر است.

$$\acute{f}(x) = \acute{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ فقط به معنی $\acute{y}(x)$ است با این حال $\frac{dy}{dx} = \acute{y}(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ بنابراین $\frac{dy}{dx}$ حد یک کسر است و خواهیم دید که رفتارهای کسرگونه دارد.

قاعده زنجیری.

فرض کنیم تابع $u = u(x)$ در x مشتق پذیر و تابع $f(u)$ در u مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع $y = f\big(u(x)\big)$ در x مشتق پذیر است و داریم:

$$\acute{f}(u(x)) = \acute{f}(u).\acute{u}(x)$$

به عبارت دیگر:

$$\acute{y}(x) = \acute{y}(u).\acute{u}(x)$$

با نماد لایپ نیتسی ، قاعده زنجیری به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

نکته. هرگاه $y = f\big(u(x)\big)$ ، بنا به قاعده زنجیری به تمام فرمول‌های مشتق، ضریب $\acute{u}(x)$ ضرب می‌شود. مثلاً

$$(sinu)'_x = cosu.\acute{u}(x)$$

$$\left(\sqrt{u}\right)'_x = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}.\acute{u}(x)$$

$$(tanx^{-۱}u)'_x = \frac{۱}{۱ + u^۲}.\acute{u}(x)$$

چند مثال.

$$\left(sin\ (\sqrt{x}\ )\right)' = \cos\left(\sqrt{x}\right) \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \qquad (u = \sqrt{x})$$

$$\left(ln\ (\frac{۱}{x})\right)' = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} \times \frac{-۱}{x^۲} \qquad (u = \frac{۱}{x})$$

$$(\cos^۸ x)' = ۸\ \cos^۷ x \times (-sinx) \qquad (u = \cos x)$$

$$(tan^{-۱}\ (x^۲\ ))' = \frac{۱}{۱ + (x^۲)^۲} \times ۲\ x \qquad (\ u = x^۲)$$

مثال. اگر $\acute{f}(x) = \sqrt{x^۲ + ۱}$ ، مشتق تابع $f\left(\frac{۱}{x+۴}\right)$ را بیابید.

حل. اگر $u = \frac{۱}{x+۴}$ ، بنا به قاعده زنجیری:

$$\left(f\left(\frac{۱}{x + ۴}\right)\ \right)'(x) = \acute{f}(u).\acute{u}(x) = \sqrt{u^۲ + ۱}.\frac{-۱}{(x + ۴)^۲}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{۱}{x + ۴}\right)^۲ + ۱}\ .\ \frac{-۱}{(x + ۴)^۲}$$

مشتق مراتب بالاتر. اگر $y = f(x)$ ، مشتق مراتب بالاتر f در صورت وجود به صورت زیر است:

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = y''(x) = f''(x) = \left(\acute{f}(x)\right)'$$

$$\frac{d^۳y}{dx^۳} = y^{(۳)}(x) = f^{(۳)}\ (x) = \left(f''(x)\right)'$$

$$\frac{d^۴y}{dx^۴} = y^{(۴)}(x) = f^{(۴)}\ (x) = \left(f^{(۳)}(x)\right)'$$

مثال. اگر $f(x) = xe^{۳x}$ ، مشتق مرتبه‌ی پانزدهم f را در $x = ۰$ بیابید.

حل.
$$\acute{f}(x) = e^{۳x} + ۳xe^{۳x} = (۳x + ۱)e^{۳x}$$
$$\acute{\acute{f}}(x) = (۳^۲x + ۲ \times ۳)e^{۳x}$$
$$f^{(۳)}(x) = (۳^۳x + ۳ \times ۳^۲)e^{۳x}$$
$$f^{(۴)}(x) = (۳^۴x + ۴ \times ۳^۳)e^{۳x}$$

با ادامه این فرایند مشتق مرتبه‌ی پانزدهم برابر است با:
$$f^{(۱۵)}(x) = (۳^{۱۵}x + ۱۵ \times ۳^{۱۴})e^{۳x}$$
$$f^{(۱۵)}(۰) = ۱۵ \times ۳^{۱۴}$$

مشتق‌گیری ضمنی

اگر y تابعی ضمنی از x با رابطه‌ی $f(x,y) = ۰$ باشد، با فرض مشتق پذیر بودن y نسبت به x می‌توان از طرفین معادله مشتق گرفت، این روش را مشتق‌گیری ضمنی می‌نامند.

مثال: در معادله‌ی $x^۲ + y^۳ = ۱$ ، $y(\acute{x})$ را بیابید.

حل. از طرفین معادله مشتق می‌گیریم : $۲x + ۳y^۲\acute{y} = ۰$ لذا $\acute{y} = \frac{-۲x}{۳y^۲}$

فرض کنیم y تابعی ضمنی از x با رابطه ی $f(x,y) = ۰$ باشد. تحت شرایط مناسب $\acute{y}(x)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:
$$\frac{dy}{dx} = \acute{y}(x) = -\frac{f_x}{f_y}$$

که در آن f_x مشتق f نسبت به x است. (y ثابت فرض می‌شود.)

همچنین f_y مشتق f نسبت به y است.(x ثابت فرض می‌شود.)

نکته. به طور مشابه: $\frac{dx}{dy} = \acute{x}(y) = -\frac{f_y}{f_x}$

مثال. معادله‌ی خط مماس به هذلولی $x^۲ + ۲xy - y^۲ + x = ۲$ را در نقطه‌ی $A(۱,۲)$ بیابید.

حل. اگر $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{۲x+۲y+۱}{۲x-۲y}$ آنگاه:
$$m = \acute{y}(x)\Big|_{A(۱,۲)} = -\frac{۲+۴+۱}{۲-۴} = \frac{۷}{۲}$$

بنابراین معادله خط مماس برابر است با :
$$y - ۲ = \frac{۷}{۲}(x - ۱)$$

مثال. در معاله‌ی $x^۳ + y^۳ = ۲$ ، $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ را بیابید.

حل. $\acute{y} = \frac{dy}{dx} = -\frac{۳x^۲}{۳y^۲} = \frac{-x^۲}{y^۲}$ پس: $\acute{y}\,.y^۲ = -x^۲$ از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$\acute{\acute{y}}.y^۲ + ۲\,y(\,\acute{y}\,)^۲ = -۲\,x$$

با جایگذاری $\acute{y} = \frac{-x^۲}{y^۲}$ در معادله به دست می‌آید:

$$\acute{\acute{y}} = \frac{-۴\,x}{y^۵}$$

مشتق تابع وارون

قضیه. فرض کنیم تابع $f(x)$ روی فاصله I مشتق پذیر و $\acute{f}\ (x)$ روی I همواره مثبت (یا منفی) باشد و $f(a) = b$ در این صورت:

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{\acute{f}\ (a)}$$

بنابراین قضیه اگر $y = f^{-۱}(x)$ ، آنگاه $\acute{y}\ (x) = \frac{۱}{\acute{x}\ (y)}$ و با نماد لایپ نیتسی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\frac{dx}{dy}}$$

مثال. اگر $f(x) = x + e^x$ ، مشتق $f^{-۱}$ را در نقطه ی $x = ۱$ بیابید.

حل. $\acute{f}\ (x) = ۱ + e^x > ۰$ و $f(۰) = ۱$ بنا به قضیه‌ی مشتق وارون:

$$(f^{-۱})'(۱) = \frac{۱}{\acute{f}\ (۰)} = \frac{۱}{۲}$$

مثال. مشتق تابع $y = tan^{-۱}x$ را بیابید.

حل. $y = tan^{-۱}x$ پس $x = tany$ همچنین $\acute{x}\ (y) = ۱ + tan^۲y$ بنا به قضیه:

$$\acute{y}\ (x) = \frac{۱}{\acute{x}\ (y)} = \frac{۱}{tan^۲y} = \frac{۱}{۱ + x^۲}$$

بنابراین:

$$(tan^{-۱}x)' = \frac{۱}{۱ + x^۲}$$

مشتق لگاریتمی

مثال. مشتق تابع $y = x^x \quad , \quad x > ۰$ را بیابید.

حل. از طرفین معادله $y = x^x$ ، ln می‌گیریم: $lny = xlnx$

از طرفین معادله‌ی اخیر مشتق می‌گیریم: $\frac{\acute{y}}{y} = lnx + ۱$

لذا $\acute{y} = y(lnx + ۱)$

بنابراین:

$$\acute{y} = x^x(lnx + ۱)$$

این روش را که ابتدا لگاریتم و بعد مشتق گرفتیم، مشتق لگاریتمی می‌نامند.

مثال. مشتق تابع $f(x) = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x \quad , \quad x > ۰$ را بیابید.

حل. $y = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x$ لذا $lny = xln(۱ + \frac{۱}{x})$

$$\frac{\acute{y}}{y} = ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right) + x\left(\frac{\frac{-۱}{x^۲}}{۱ + \frac{۱}{x}}\right)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right) + \left(\frac{-۱}{x + ۱}\right)$$

بنابراین:

$$\acute{y} = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x \left(\frac{-۱}{x+۱} + ln\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\right)$$

۴- دیفرانسیل

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، دیفرانسیل y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$dy = \acute{f}\,(x)dx$$

که در آن dx ،دیفرانسیل x و متغیری مستقل می‌باشد. در واقع dy تابعی بر حسب دو متغیر مستقل x و dx است.

مثال: اگر $y = x^۲ + ۳\,x$ ، دیفرانسیل y را به ازای $x = ۱$ و $dx = ۰/۱$ حساب کنید.

حل.

$dy = \acute{y}\,(x)dx = (۲\,x + ۳)dx$ ، به ازای $x = ۱$ و $dx = ۰/۱$ بدست می‌آید:

$$dy = (۲ + ۳)\;۰/۱ = ۰/۵$$

در زیر دیفرانسیل چند تابع حساب شده است.

$$d(\sqrt{x}) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$$
$$d\left(\frac{۱}{x} + e^x\right) = \left(\frac{-۱}{x^۲} + e^x\right)dx$$
$$d(-۵\,x + ۱) = -۵\,dx$$

اگر $\Delta x = x - x_۰$ و $\Delta y = f(x) - f(x_۰)$ داریم : $\acute{f}\,(x_۰) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

به ازای Δx های کوچک:

$$\acute{f}\,(x) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{و یا} \quad \Delta y \cong \acute{f}\,(x_۰)\Delta x$$

اگر $dx = \Delta x$ داریم: $\Delta y \cong \acute{f}\,(x_۰)dx$

پس به ازای Δx های کوچک: $\Delta y \cong dy$

۵- تمرینات فصل چهارم

۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید و عدد بدست آمده را به عنوان آهنگ تغییر دو کمیت تفسیر کنید.

الف) $f(x) = x^۲ + x \ , \ x_۰ = ۲$

ب) $f(x) = \frac{۱}{x^۲} \ , \ x_۰ = ۱$

۲- مشتق بگیرید.

الف) $f(x) = x^۳e^x$ ب) $f(x) = sinx.lnx$

ج) $g(x) = \frac{tanx}{x^۲+x}$ د) $g(x) = \frac{tan^{-۱}x}{x}$

۳- معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x}$ را در نقطه‌ی $x = ۱$ بیابید.

۴- معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = -x^۲ + ۲\,x + ۳$ را طوری بیابید که موازی خط $y = ۴\,x + ۱$ باشد.

۵- مشتق بگیرید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{2}-2 & x<2 \\ 4x-6 & x\geq 2 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \frac{2}{x}+1 & x\geq 2 \\ x^{2}-2 & 1\leq x<2 \\ x^{4}-2x & x<1 \end{cases}$

۶- تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ و فقط در دو نقطه مشتق پذیر باشد.

۷- مشتق بگیرید:

الف) $f(x)=\sqrt{x^{3}+2x}$ ب) $g(x)=ln\,(sinx)$

ج) $f(t)=sin^{4}t$ د) $g(x)=tan^{-1}(e^{x})$

هـ) $y=\sqrt{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ و) $y=sinh^{-1}(sinhx)$

۸- اگر $\acute{f}\,(x)=ln\,(3x)$ ، مشتق تابع $f\left(\frac{3x+1}{x}\right)$ را بیابید.

۹- میزان تغییر $\sqrt{2x^{2}+4}$ را نسبت به $\frac{x^{2}}{1-x^{2}}$ در $x=2$ بیابید.

۱۰- اگر $x>0$ ، مشتق تابع $y=x^{sinx}$ را بیابید.

۱۱- مشتق تابع $y=(coshx)^{2x+1}$ را بدست آورید.

۱۲-با استفاده از مشتق ضمنی، شیب خط مماس بر دایره‌ی $x^{2}+y^{2}=25$ را در نقطه‌ی $A(3,4)$ بیابید.

۱۳- معادله‌ی خط مماس بر بیضی $4x^{2}+2xy+y^{2}=3$ را در نقطه‌ی $A(-1,1)$ بیابید.

۱۴- در معادله‌ی $x^{4}y^{2}-x^{3}y+2xy^{3}=0$ ، $\frac{dx}{dy}$ را بدست آورید.

۱۵- معادله‌ی خط مماس بر سهمی $y^{۲} - ۲y + ۲ - x = ۰$ را طوری پیدا کنید که از نقطه‌ی $B\left(\frac{-۹}{۲}, ۱\right)$ عبور کند.

۱۶- با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی در معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$ ، $y''(x)$ را بیابید.

۱۷- با استفاده از مشتق توابع وارون، مشتق توابع زیر را ثابت کنید.

الف) $(sin^{-۱}x)' = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ ب) $(cosh^{-۱}x)' = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۱۸- اگر $f(x) = ۳x^{۵} + ۲x^{۳}$ ، مشتق تابع $f^{-۱}$ را در نقطه ی $x_{۰} = ۵$ بیابید.

۱۹- اگر $y = f^{-۱}(x)$ ، فرمولی برای مشتق دوم $f^{-۱}(x)$ بیابید.

۲۰- مشتق مرتبه‌ی ۲۵، تابع $f(x) = \ln x$ را در نقطه‌ی $x_{۰} = ۱$ پیدا کنید.

۲۱- مشتق مرتبه‌ی ۳۵، تابع $f(x) = x \sin x$ را پیدا کنید.

۲۲ -دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

الف) $y = x^{۴} - ۳x$ ب) $y = e^{۲x} + \frac{۱}{x}$

۲۳-اگر $y = \frac{۲}{x}$ ، $x = ۴$ و $\Delta x = ۱$ مقادیر dy و Δy را حساب کنید.